Matematica

Equazioni di 1° grado

Autore: prof. ***Pappalardo Vincenzo***
docente di **Matematica e Fisica**

Indice

1. Definizione di equazione
2. Classificazione delle equazioni
3. Equazioni equivalenti
4. Procedura risolutiva di un’ equazione di 1° grado
5. Possibili soluzioni di un’ equazione
6. Problemi di 1° grado
7. Manipolazione delle formule

1. DEFINIZIONE DI EQUAZIONE

Coefficiente dell' incognita

Incognita

Termine noto

$$10x = 20$$

Primo membro

Secondo membro

Domanda : qual è quel numero x che moltiplicato per 10 dà 20?

Risposta: 2 **Perché:** $10 \cdot 2 = 20$

CONCLUSIONE:

- Un' equazione è una uguaglianza tra due membri che è verificata quando l' incognita x assume solo un particolare valore.

❑ **Risolvere un' equazione significa trovare il valore dell'incognita tale da rendere il primo membro uguale al secondo.**

Sia data la seguente espressione:

$$5x - 1 = 3x + 2x - 1 \qquad (1)$$

Domanda: qual è il valore dell'incognita x che rende il primo membro uguale al secondo?

Risposta: **tutti i numeri**

Verifichiamo:

$x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \rightarrow$ **4 = 4 uguaglianza verificata**

$x = 2 \Rightarrow 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \rightarrow$ **9 = 9 uguaglianza verificata**

$x = -3 \Rightarrow 5 \cdot (-3) - 1 = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) - 1 \rightarrow$ **-16 = -16 uguaglianza verificata**

CONCLUSIONE: se effettuiamo le verifiche per tutti i numeri, l'uguaglianza sarà sempre verificata, per cui l'espressione (1) si chiama *identità*.

DEFINIZIONE - Si definisce identità un'uguaglianza che è sempre verificata, qualunque sia il valore che viene attribuito all'incognita x.

ESEMPI

Applicando il concetto di equazione, verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

Esempio N.1

$3x - 2 = x$ $\quad x = 1;\ x = 0$ ⇒ **Procedura:** Sostituiamo i valori x = 1 e x = 0 nell' equazione:

$3 \cdot 1 - 2 = 1$ ⇒ $1 = 1$ l' equazione è soddisfatta per cui x = 1 è la soluzione

$3 \cdot 0 - 2 = 0$ ⇒ $-2 = 0$ l' equazione non è soddisfatta per cui x = 0 non è la soluzione

Esempio N.2

$x^2 - 7x = -10$ $\quad x = 1;\ x = 2$ ⇒ **Procedura:** Sostituiamo i valori x = 1 e x = 2 nell' equazione:

$(1)^2 - 7 \cdot 1 = -10$ ⇒ $-6 = -10$ l' equazione non è soddisfatta per cui x = 1 non è la soluzione

$(2)^2 - 7 \cdot 2 = -10$ ⇒ $-10 = -10$ l' equazione è soddisfatta per cui x = 2 è la soluzione

2. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI

Esaminiamo solo i tipi di equazioni che affronteremo:

Equazioni algebriche: equazioni nelle quali compaiono le quattro operazioni elementari e le potenze.

Se in queste equazioni le incognite non compaiono mai a denominatore, l'equazione si dice *intera*.

Esempi:

$$5x - 3 + 4x = -3x + 1 + 5x$$

$$\frac{3}{2}x - 1 + \frac{4}{5} = 3x - \frac{2}{3}x + 3$$

Se l'incognita compare al denominatore l'equazione si chiama *fratta o frazionaria*.

Esempio:

$$\frac{x-3}{5x+1} - \frac{3}{2} + 2x = \frac{2x-3}{10x+2} + 2$$

3. EQUAZIONI EQUIVALENTI

Siano date le seguenti due equazioni:

$$3x + 1 = x + 5 \qquad\qquad 6x + 2 = 2x + 10$$

DOMANDA: cosa hanno in comune queste due equazioni?

Risposta: la stessa soluzione $x = 2$

Verifichiamo:

1ª equazione $\Rightarrow$ $3 \cdot 2 + 1 = 2 + 5$ $\Rightarrow$ $7 = 7$ **uguaglianza verificata**

2ª equazione $\Rightarrow$ $6 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 2 + 10$ $\Rightarrow$ $14 = 14$ **uguaglianza verificata**

CONCLUSIONE:

Equazioni che ammettono la stessa soluzione si chiamano **equazioni equivalenti**.

ESEMPI

La seguente equazione:

$2x + 1 = -4x + 4$ ammette come soluzione **$x = \frac{1}{2}$**

Individuare, attraverso la verifica, quale tra le seguenti equazioni è equivalente a quella data:

$$\boxed{4x - 3 = 2x - 1} \Longrightarrow \cancel{4}^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - 3 = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - 1 \Longrightarrow -1 = -1$$

L'equazione è soddisfatta per cui è equivalente a quella data in quanto ammette la stessa soluzione.

$$\boxed{\frac{1}{4}x - 5 = x + 3} \Longrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{2} + 3 \Longrightarrow \frac{1}{8} - 5 = \frac{1}{2} + 3 \Longrightarrow \frac{1 - 40}{8} = \frac{1 + 6}{2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{39}{8} = \frac{7}{2}$$

L'equazione non è soddisfatta per cui non è equivalente a quella data in quanto non ammette la stessa soluzione.

4. PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN'EQUAZIONE DI 1° GRADO

Il procedimento generale per risolvere un'equazione di 1° grado si basa su due teoremi detti principi di equivalenza.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – **Addizionando o sottraendo una stessa quantità ad entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data (ossia l'equazione non cambia).**

ESEMPIO:

(1) $4x - 27 = -6x + 3$ ammette come soluzione $x = 3$

Verifichiamo: $4 \cdot 3 - 27 = -6 \cdot 3 + 3 \Longrightarrow -15 = -15$ uguaglianza verificata

Applichiamo il primo principio di equivalenza all'equazione (1), addizionando ad entrambi i membri la quantità 10. Si ottiene la seguente equazione:

$4x - 27 + 10 = -6x + 3 + 10$ E' equivalente alla (1), ossia ammette la stessa soluzione $x = 3$.

Verifichiamo: $4 \cdot 3 - 27 + 10 = -6 \cdot 3 + 3 + 10 \Longrightarrow -5 = -5$ uguaglianza verificata

Lo stesso discorso vale se sottraiamo una stessa quantità.

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Moltiplicando o dividendo per una stessa quantità entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data (ossia l'equazione non cambia).

Esempio:

(2) $2x - 5 = -4x + 7$ ammette come soluzione $x = 2$

Verificiamo: $2 \cdot 2 - 5 = -4 \cdot 2 + 7 \Rightarrow -1 = -1$ uguaglianza verificata

Applichiamo il secondo principio di equivalenza all'equazione (2), moltiplicando entrambi i membri per la quantità 5. Si ottiene la seguente equazione:

$5 \cdot (2x - 5) = 5 \cdot (-4x + 7)$ E' equivalente alla (2), ossia ammette la stessa soluzione $x = 2$.

Verificiamo:

$5 \cdot (2 \cdot 2 - 5) = 5 \cdot (-4 \cdot 2 + 7) \Rightarrow -5 = -5$ uguaglianza verificata

Lo stesso discorso vale se dividiamo per una stessa quantità.

PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN' EQUAZIONE INTERA

ESEMPIO N. 1

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$$

si deve procedere come segue.

1. Si portano tutti i termini contenente l' incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all' altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$7x + 2x - 2x - 5x = 6 - 5 - 15$$

2. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x = -14$$

3. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = -\frac{14}{2} \Longrightarrow x = -7$$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$7 \cdot (-7) - 6 + 2 \cdot (-7) + 5 = 2 \cdot (-7) - 15 + 5 \cdot (-7) \Longrightarrow -49 - 6 - 14 + 5 = -14 - 15 - 35$$

$-64 = -64$ uguaglianza verificata

Se l'uguaglianza non è verificata, c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

ESEMPIO N. 2

Per risolvere la seguente la seguente equazione algebrica:

$(5x+1)^2 - 5(2x+3) = (5x-2)(5x+2) - 2x$ **si deve procedere come segue.**

1. Si applicano le regole del calcolo algebrico per eliminare le parentesi e sviluppare i prodotti notevoli:

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 = 25x^2 - 4 - 2x$$

2. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$\cancel{25x^2} + \cancel{10x} - \cancel{10x} - \cancel{25x^2} + 2x = -1 + 15 - 4$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x = 10$$

4. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza): $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow x = 5$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell' equazione di partenza ed ottenere l' uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$(5x+1)^2 - 5(2x+3) = (5x-2)(5x+2) - 2x$$

$$(5\cdot 5+1)^2 - 5(2\cdot 5+3) = (5\cdot 5-2)(5\cdot 5+2) - 2\cdot 5$$

$$676 - 65 = 621 - 10$$

$611 = 611$ uguaglianza verificata

Se l'uguaglianza non è verificata, c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

ESEMPIO N. 3

Per risolvere la seguente la seguente equazione algebrica intera:

$$\frac{3}{2}x-3+\frac{5}{4}x=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}x+4$$ si deve procedere come segue.

1. Si effettua il mcm di tutti i denominatori e le conseguenti operazioni:

$$\frac{12x-24+10x}{8}=\frac{3-2x+32}{8}$$

2. Si elimina il mcm moltiplicando entrambi i membri per il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\cancel{8}\cdot\frac{12x-24+10x}{\cancel{8}}=\frac{3-2x+32}{\cancel{8}}\cdot\cancel{8}$$

3. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$12x + 10x + 2x = 24 + 3 + 32$$

4. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$24x = 59$$

5. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{24}x}{\cancel{24}} = \frac{59}{24} \Longrightarrow x = \frac{59}{24}$$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{59}{24} - 3 + \frac{5}{4}\cdot\frac{59}{24} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{59}{24} + 4 \Longrightarrow \frac{177}{48} - 3 + \frac{295}{96} = \frac{3}{8} - \frac{59}{96} + 4$$

$$\frac{354 - 288 + 295}{9\cancel{6}} = \frac{36 - 59 + 384}{9\cancel{6}} \Longrightarrow 361 = 361$$ **uguaglianza verificata**

Se l'uguaglianza non è verificata, c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN' EQUAZIONE FRATTA

ESEMPIO N. 1

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$\frac{3x-1}{2x+2}+\frac{5x}{3x+3}=\frac{7x-1}{6x+6}$$

si deve procedere come segue:

1. Si effettua la scomposizione dei denominatori di tutte le frazioni che compongono l' equazione:

$$\frac{3x-1}{2\cdot(x+1)}+\frac{5x}{3\cdot(x+1)}=\frac{7x-1}{6\cdot(x+1)}$$

2. Si calcola il mcm di tutti i denominatori che abbiamo scomposto, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{3\cdot(3x-1)+10x}{6\cdot(x+1)}=\frac{7x-1}{6\cdot(x+1)}$$

3. Si studia il dominio dell'equazione, ossia bisogna cercare quei valori dell'incognita che annullano il mcm, perché tali valori rendono priva di significato l'equazione:

$$6 \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

pertanto il valore x = -1 non dovrà essere accettato come soluzione dell'equazione, e quindi non farà parte del dominio dell'equazione:

$$D = \Re - \{-1\}$$

Definizione dominio: si chiama dominio D di una equazione l'insieme dei valori che possono essere assunti dall'incognita.

4. Si elimina il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{3 \cdot (3x-1)+10x}{\cancel{6 \cdot (x+1)}} = \frac{7x-1}{\cancel{6 \cdot (x+1)}} \Rightarrow 3 \cdot (3x-1)+10x = 7x-1$$

5. Si risolve l'equazione intera ottenuta:

$$9x-3+10x = 7x-1 \Rightarrow 9x+10x-7x = 3-1 \Rightarrow 12x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

6. Si verifica l'appartenenza del risultato trovato al dominio D:

$x = \frac{1}{6}$ APPARTIENE AL DOMINIO D DELL'EQUAZIONE PER CUI PUÒ ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE

ESEMPIO N. 2

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$\frac{x+2}{x-1}=\frac{2x+1}{x-1}-1$$ si deve procedere come segue:

1. Si calcola il mcm di tutti i denominatori, dato che non c' è niente da scomporre, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{x+2}{x-1}=\frac{2x+1-1\cdot(x-1)}{x-1}$$

2. Si studia il dominio dell' equazione:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

pertanto il valore x = 1 non dovrà essere accettato come soluzione dell' equazione, e quindi non fa parte del dominio dell' equazione:

$$D=\Re-\{1\}$$

3. Si elimina il mcm :

$$\frac{x+2}{\cancel{x-1}}=\frac{2x+1-1\cdot(x-1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow x+2=2x+1-x+1$$

4. Si risolve l' equazione intera ottenuta:

$$0x=0 \Rightarrow$$ Soluzione indeterminata

ESEMPIO N. 3

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{x+3}=\frac{6}{x^2+3x}$$

si deve procedere come segue:

1. Si effettua la scomposizione dei denominatori di tutte le frazioni che compongono l'equazione:

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{x+3}=\frac{6}{x\cdot(x+3)}$$

2. Si calcola il mcm di tutti i denominatori che abbiamo scomposto, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{x+3-2x}{x\cdot(x+3)}=\frac{6}{x\cdot(x+3)}$$

3. Si studia il dominio dell' equazione:

$$x \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x+3=0 \Rightarrow x=0 \quad x=-3$$

pertanto i valori x = 0 e x = -3 non dovranno essere accettati come soluzioni dell' equazione, e quindi non fanno parte del dominio dell' equazione:

$$D = \Re - \{-3;0\}$$

4. Si elimina il mcm :

$$\frac{x+3-2x}{\cancel{x \cdot (x+3)}} = \frac{6}{\cancel{x \cdot (x+3)}} \Rightarrow x+3-2x=6$$

5. Si risolve l' equazione intera ottenuta:

$$-x = 3 \Rightarrow x = -3$$

6. Si verifica l' appartenenza del risultato trovato al dominio D:

$x = -3$ Non appartiene al dominio D dell' equazione per cui non può essere accettata come soluzione, e quindi

L' EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONE

ESEMPIO N. 4

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{3}{x^2-x}=\frac{4}{x^2-2x}$$

si deve procedere come segue:

1. Si effettua la scomposizione dei denominatori di tutte le frazioni che compongono l' equazione:

$$\frac{2}{(x-1)\cdot(x-2)}-\frac{3}{x\cdot(x-1)}=\frac{4}{x\cdot(x-2)}$$

2. Si calcola il mcm di tutti i denominatori che abbiamo scomposto, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{2x-3\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{4\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}$$

3. Si studia il dominio dell' equazione:

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x-1=0 \quad x-2=0 \Rightarrow x=0 \quad x=1 \quad x=2$$

pertanto i valori x = 0 e x = 1 e x = 2 non dovranno essere accettati come soluzioni dell' equazione, e quindi non fanno parte del dominio dell' equazione:

$$D = \Re - \{0;1;2\}$$

4. Si elimina il mcm :

$$\frac{2x - 3 \cdot (x-2)}{\cancel{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}} = \frac{4 \cdot (x-1)}{\cancel{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}} \Rightarrow 2x - 3 \cdot (x-2) = 4 \cdot (x-1)$$

5. Si risolve l' equazione intera ottenuta:

$$2x - 3x + 6 = 4x - 4 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = 2$$

6. Si verifica l' appartenenza del risultato trovato al dominio D:

$x = 2$ NON APPARTIENE AL DOMINIO D DELL' EQUAZIONE PER CUI NON PUÒ ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE, E QUINDI

L' EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONE

5. POSSIBILI SOLUZIONI DI UN' EQUAZIONE

ESEMPIO N.1

$4(x + 1) - 2x = 3(2x + 5) \Longrightarrow 4x + 4 - 2x = 6x + 15 \Longrightarrow 4x - 2x - 6x = -4 + 15$

$-4x = 11 \Longrightarrow 4x = -11 \Longrightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = -\frac{11}{4} \Rightarrow x = -\frac{11}{4}$

Soluzione determinata

Quando l' equazione ammette una soluzione ben precisa, la soluzione si chiama determinata.

ESEMPIO N. 2

$2(1 - 2x) + 4 = 3(1 - 2x) + 2(x + 3) \Longrightarrow 2 - 4x + 4 = 3 - 6x + 2x + 6$

$-4x + 6x - 2x = -2 - 4 + 3 + 6 \Longrightarrow 0x = 3$

Soluzione impossibile

Poiché non esiste nessun numero x che moltiplicato per 0 dia 3, allora in questo caso diremo che la soluzione non esiste e la chiameremo soluzione impossibile.

ESEMPIO N. 3

$2(1 - x) + 3 = 2x - 3 + 4(2 - x) \Longrightarrow 2 - 2x + 3 = 2x - 3 + 8 - 4x$

$-2x - 2x + 4x = -2 - 3 - 3 + 8 \Longrightarrow 0x = 0$

Soluzione indeterminata

Poiché tutti i numeri x moltiplicati per 0 danno 0, allora le soluzioni sono infinite, per cui la soluzione é indeterminata. L'equazione in esame è una un'identità.

Esercizi di riepilogo

1. **Stabilire quali delle seguenti uguaglianze sono identità e quali equazioni:** $2x+1=x+x+3-2$ $\quad$ $3x-11=-5x-1$

Soluzione

$$2x+1=x+x+3-2 \Longrightarrow 2x-x-x=-1+3-2 \Longrightarrow 0x=0$$

Poiché tutti i numeri x moltiplicati per 0 danno 0, allora diremo che le soluzioni sono infinite, per cui l'uguaglianza in esame è un'identità.

$$3x-11=-5x-1 \Longrightarrow 3x+5x=11-1 \Longrightarrow 8x=10 \Longrightarrow \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

Poiché abbiamo trovato una soluzione ben precisa, l'uguaglianza in esame è un'equazione.

2. Verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

$$5x - 4 = x \qquad x = 1 \qquad x = 2$$

Soluzione

Sostituiamo prima il valore valore x = 1 e poi x = 2 nella prima equazione al posto della x:

$$5x - 4 = x \Longrightarrow 5 \cdot 1 - 4 = 1 \Longrightarrow 1 = 1$$

$$5x - 4 = x \Longrightarrow 5 \cdot 2 - 4 = 2 \Longrightarrow 6 = 2$$

Poiché l'uguaglianza tra primo e secondo membro si verifica solo nel primo caso, concludiamo dicendo che solo x = 1 è soluzione dell'equazione.

3. Risolvere la seguente equazione numerica intera e fare la verifica:

$$10\cdot(x+1)+2x-2=11x+7+2\cdot(x-1)$$

Soluzione

$$10\cdot(x+1)+2x-2=11x+7+2\cdot(x-1) \Longrightarrow 10x+10+2x-2=11x+7+2x-2$$

$$10x+2x-11x-2x=-10+7+2-2 \Longrightarrow -x=-3 \Longrightarrow x=3$$

Verifica

La verifica dell'esattezza della soluzione si effettua sostituendo nell'equazione di partenza al posto della x la soluzione trovata e verificare l'uguaglianza tra i due membri:

$$10\cdot(x+1)+2x-2=11x+7+2\cdot(x-1) \Longrightarrow 10\cdot(3+1)+2\cdot 3-2=11\cdot 3+7+2\cdot(3-1) \Longrightarrow$$

$$40+6-2=33+7+4 \Longrightarrow 44=44$$

Poiché l'uguaglianza tra primo e secondo membro si è verificata, concludiamo dicendo che x = 3 è la soluzione dell'equazione.

4. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$(x+1)^2-4=2x+(x-2)\cdot(x+2)+1$$

Soluzione

$$(x+1)^2-4=2x+(x-2)\cdot(x+2)+1 \Longrightarrow x^2+1+2x-4=2x+x^2-4+1 \Longrightarrow$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{2x}-\cancel{2x}-\cancel{x^2}=-\cancel{1}+\cancel{4}-\cancel{4}+\cancel{1} \Longrightarrow 0x=0 \Longrightarrow$$

Soluzione indeterminata

Formule prodotti notevoli

Quadrato di un binomio $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ $\quad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

Prodotto di due binomi $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

5. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$(x+1)^3 - x^2 \cdot (x+3) = 2 \cdot (x+1)$$

Soluzione

$$(x+1)^3 - x^2 \cdot (x+3) = 2 \cdot (x+1) \Longrightarrow x^3 + 1 + 3x^2 + 3x - x^3 - 3x^2 = 2x + 2$$

$$\cancel{x^3} + \cancel{3x^2} + 3x - \cancel{x^3} - \cancel{3x^2} - 2x = 2 - 1 \Longrightarrow x = 1$$

Formule prodotti notevoli

Cubo di un binomio $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

6. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$\frac{3x-1}{4}+\frac{5-x}{2}=x+2-\frac{1+2x}{4}+\frac{1}{2}$$

Soluzione

$$\frac{3x-1}{4}+\frac{5-x}{2}=x+2-\frac{1+2x}{4}+\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1+10-2x}{\cancel{4}}=\frac{4x+8-1-2x+2}{\cancel{4}}$$

$$3x-1+10-2x=4x+8-1-2x+2 \quad \Longrightarrow \quad 3x-2x-4x+2x=1-10+8-1+2$$

$$-x=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0$$

7. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$2\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)+5\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{8}+x$$

Soluzione

$$2\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)+5\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{8}+x \Longrightarrow \frac{2}{3}x-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}}x-\frac{5}{3}=\frac{5}{8}+x$$

$$\frac{2}{3}x-1+x-\frac{5}{3}=\frac{5}{8}+x \Longrightarrow \frac{16x-24+24x-40}{\cancel{24}}=\frac{15+24x}{\cancel{24}}$$

$$16x-24+24x-40=15+24x \Longrightarrow 16x+24x-24x=15+24+40$$

$$16x=79 \Longrightarrow x=\frac{79}{16}$$

8. Risolvere la seguente equazione algebrica fratta:

$$\frac{6}{x^2-4}=\frac{4}{x^2+4x+4}$$

$$\frac{6}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{6\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)^2}=\frac{4\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)^2}$$

$$\frac{6\cdot(x+2)}{\cancel{(x-2)\cdot(x+2)^2}}=\frac{4\cdot(x-2)}{\cancel{(x-2)\cdot(x+2)^2}}$$

$$6\cdot(x+2)=4\cdot(x-2) \Rightarrow 6x+12=4x-8 \Rightarrow 2x=-20 \Rightarrow x=-10$$

Dominio dell' equazione:

$$(x-2)\cdot(x+2)^2=0$$

$$x-2=0 \qquad x+2=0$$

$$x=2 \qquad x=-2$$

$$D=\Re-\{-2;2\}$$

IL VALORE $x = -10$ APPARTIENE AL DOMINIO D DELL' EQUAZIONE PER CUI PUÒ ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE

PROBLEMI DI 1° GRADO

PROCEDURA

1. Leggere attentamente il problema, individuandone l' obiettivo;
2. Individuare i dati e l' incognita;
3. Indicare con x l' incognita ed esprimere altre grandezze incognite correlate ad x mediante espressioni algebriche nella variabile x;
4. Trasformare il problema nell' equazione risolvente;
5. Risolvere l' equazione;
6. Verificare la soluzione trovata.

Problema N.1

Determinare un numero sapendo che il suo triplo, aggiunto alla sua metà, è uguale al doppio del numero stesso aumentato di 12.

Indicando con **x il numero da trovare**, l'equazione risolvente del problema è la seguente:

$$\boxed{3x} + \boxed{\frac{x}{2}} = \boxed{2x + 12}$$

Triplo di x

Doppio di di x aumentato di 12

Metà di x

La soluzione dell'equazione risolvente ci darà il numero cercato:

$$\frac{6x + x}{\cancel{2}} = \frac{4x + 24}{\cancel{2}}$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

Problema N.2

Determinare due numeri naturali consecutivi tali che i 6/5 del primo aumentati dei 5/6 del secondo diano 11.

Poniamo:

x = numero naturale **x + 1 = numero naturale consecutivo**

L' equazione risolvente sarà:

$$\frac{6}{5}x + \frac{5}{6}(x+1) = 11$$

La soluzione dell' equazione risolvente ci darà il numero cercato e quindi il suo consecutivo:

$$\frac{36x + 25\cdot(x+1)}{\cancel{30}} = \frac{330}{\cancel{30}} \Rightarrow 36x + 25x + 25 = 330 \Rightarrow 61x = 305$$

$$x = 5 \Rightarrow x + 1 = 6$$

Problema N.3

Policrate, tiranno di Samo, avendo chiesto a Pitagora quanti alunni avesse, ebbe questa risposta: “una metà studia matematica, ¼ studia i misteri della natura e 1/7 medita nel silenzio; inoltre vi sono tre donne”.

Poniamo:

x = numero totale degli studenti

L’equazione risolvente sarà:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

La soluzione dell’equazione risolvente ci darà il numero totale degli studenti:

$$\frac{14x + 7x + 4x + 84}{\cancel{28}} = \frac{28x}{\cancel{28}} \quad \Rightarrow \quad -3x = -84 \quad \Rightarrow \quad x = 28$$

Problema N.4

Determinare due numeri dispari consecutivi tali che la metà del più piccolo aggiunta ai 4/5 del più grande è uguale alla differenza tra il quadrato del più grande ed il quadrato del più piccolo.

Poniamo:

x = numero dispari **x + 2 = numero dispari consecutivo**

L' equazione risolvente sarà:

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}(x+2) = (x+2)^2 - x^2$$

La soluzione dell' equazione risolvente ci darà il numero cercato e quindi il suo consecutivo:

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} = \cancel{x^2} + 2 + 4x - \cancel{x^2} \Rightarrow \frac{5x + 8x + 16}{\cancel{10}} = \frac{20 + 40x}{\cancel{10}} \Rightarrow -27x = -4 \Rightarrow x = \frac{4}{27}$$

Poiché la soluzione non è un numero dispari, il problema non ammette soluzione.

Problema N.5

Determinare gli angoli di un triangolo sapendo che il primo è 5/4 del secondo e che il terzo supera di 15° la metà del secondo.

Dati del problema: $\alpha = \frac{5}{4} \cdot \beta \qquad \gamma = \frac{\beta}{2} + 15°$

L'equazione risolvente del problema è la seguente $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Scelta dell'incognita $\Rightarrow$ $x = \beta$

perché dai dati del problema α e γ sono espressi in funzione di β, e quindi l'equazione risolvente in questo modo conterrà una sola incognita, cioè β:

$$\frac{5}{4}x + x + \frac{x}{2} + 15 = 180 \Rightarrow \frac{5x + 4x + 2x + 60}{\cancel{4}} = \frac{720}{\cancel{4}} \Rightarrow 11x = 660 \Rightarrow x = 60°$$

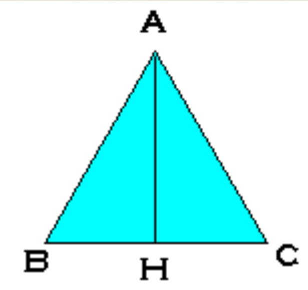
In definitiva:

$$\beta = 60° \qquad \alpha = \frac{5}{4} \cdot 60 = 75° \qquad \gamma = \frac{60°}{2} + 15° = 45°$$

Problema N.6

Nel triangolo isoscele ABC, la base BC supera di 22 cm l'altezza AH. Determinare il perimetro sapendo che:

$$\frac{4}{5}BC + \frac{7}{4}AH = 38$$



Dati del problema: $BC = AH + 22$

L'equazione risolvente del problema è la seguente ⇒ $\frac{4}{5}BC + \frac{7}{4}AH = 38$

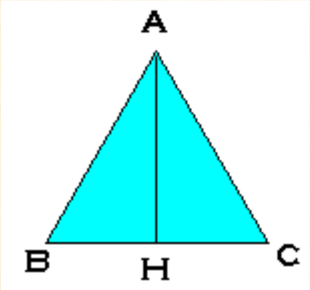
Scelta dell'incognita ⇒ $x = AH$

Sfruttando i dati del problema, l'equazione risolvente diventa:

$$\frac{4}{5}\cdot(x+22) + \frac{7}{4}x = 38 \Rightarrow \frac{16\cdot(x+22)+35x}{\cancel{20}} = \frac{760}{\cancel{20}} \Rightarrow 16x + 352 + 35x = 760$$

$$51x = 408 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow AH = 8cm \Rightarrow BC = 30cm$$

Per calcolare il lato AC applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHC, dove il lato HC è la metà della basa BC:



$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17\text{cm}$$

In definitiva il perimetro del triangolo sarà:

$$P = AB + BC + AC = 17 + 30 + 17 = 64\text{cm}$$

Problema N.6

Un aereo decolla alle ore 14.30 e vola con velocità v = 575 km/h. In seguito ad un' avaria, si rende necessario effettuare in quota un rifornimento di carburante, portato da un aereo che decolla alle 16.00 e viaggia alla velocità di 800 km/h. Se il pilota del primo aereo ha stimato che il proprio carburante è sufficiente per volare fino alle ore 20.30, riuscirà il velivolo di soccorso a raggiungere in tempo quello in difficoltà?

1. Obiettivo: a che ora il secondo aereo raggiungerà il primo.
2. Dati: velocità e orari di partenza degli aerei; incognita: tempo di incontro tra i due aerei
3. Tempo = x
4. Equazione risolvente: quando i due aerei s' incontreranno, avranno percorso lo stesso tragitto, che in fisica è dato dal prodotto della velocità e del tempo.

Tragitto primo aereo = Tragitto secondo aereo $\Longrightarrow$ $575x = 800 \cdot (x - 1{,}5)$

$575x = 800x - 1200 \Longrightarrow 575x - 800x = -1200 \Longrightarrow -225x = -1200$

$225x = 1200 \Longrightarrow \frac{\cancel{225}}{\cancel{225}}x = \frac{1200}{225} = 5{,}3$

Verifica della soluzione:

Poiché il secondo aereo incontra il primo dopo 5,3 ore dopo il decollo, ossia intorno alle ore 19.50, farà in tempo a soccorrerlo.

PROCEDURA RISOLUTIVA

1. Obiettivo: a che ora il secondo aereo raggiungerà il primo.
2. Dati: velocità e orari di partenza degli aerei; incognita: tempo di incontro tra i due aerei
3. Tempo = x
4. Equazione risolvente: quando i due aerei s' incontreranno, avranno percorso lo stesso tragitto, che in fisica è dato dal prodotto della velocità e del tempo.

Tragitto primo aereo = Tragitto secondo aereo $\Longrightarrow$ $575x = 800 \cdot (x - 1{,}5)$

$575x = 800x - 1200 \Longrightarrow 575x - 800x = -1200 \Longrightarrow -225x = -1200$

$$225x = 1200 \Longrightarrow \frac{\cancel{225}}{\cancel{225}}x = \frac{1200}{225} = 5{,}3$$

Verifica della soluzione:

Poiché il secondo aereo incontra il primo dopo 5,3 ore dopo il decollo, ossia intorno alle ore 19.50, farà in tempo a soccorrerlo.

7. MANIPOLAZIONE DELLE FORMULE

Qualsiasi formula può essere pensata come un'equazione, ossia come un'espressione contenente un'incognita che bisogna trovare. In sostanza trovare le cosiddette formule inverse significa risolvere un'equazione rispetto alla variabile scelta come incognita.

ESEMPIO N. 1

$$S_{Finale} = S_{Iniziale} + V \cdot t$$

→ Legge del moto rettilineo uniforme

Risolviamo rispetto a t, ossia t è l'incognita e tutte le altre variabili vanno considerate come numeri, cioè quantità note:

$$V \bullet t = S_F - S_I \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{v} \cdot t}{\cancel{v}} = \frac{S_F - S_I}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{S_F - S_I}{t}}$$

ESEMPIO N. 2

$$\boxed{a = \frac{V_{Finale} - V_{Iniziale}}{t}} \Longrightarrow$$

Definizione di accelerazione

Risolviamo rispetto a $V_{iniziale}$, ossia $V_{iniziale}$ è l' incognita e tutte le altre variabili vanno considerate come numeri, cioè quantità note:

$$\frac{a \cdot t}{t} = \frac{V_F - V_I}{t} \Longrightarrow \frac{a \cdot t}{\cancel{t}} = \frac{V_F - V_I}{\cancel{t}}$$

$$a \cdot t = V_F - V_I \Longrightarrow \boxed{V_I = V_F - a \cdot t}$$

ESEMPIO N. 3

$$\boxed{F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{d^2}} \Longrightarrow$$ Legge della gravitazione universale

Risolviamo rispetto a d, ossia d è l' incognita e tutte le altre variabili vanno considerate come numeri, cioè quantità note:

$$\frac{F \cdot d^2}{d^2} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{d^2} \Longrightarrow \frac{F \cdot d^2}{\cancel{d}^2} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{\cancel{d}^2} \Longrightarrow F \cdot d^2 = G \cdot M_1 \cdot M_2$$

$$\frac{\cancel{F} \cdot d^2}{\cancel{F}} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{F} \Longrightarrow d^2 = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{F} \Longrightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{F}}}$$